ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 99 (Σχολικό Βιβλίο) Απόδειξη Θεωρήματος

Α2. α. Λ

β. $f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{Bmatrix}$. Είναι $''1-1''$ αλλά:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ γνησίως φθίνουσα.
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow$ γνησίως αύξουσα

Α3. Σελ. 216 (Σχολικό Βιβίλο)

Α4. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$f'^{(x)} = 1 + \frac{4 \cdot 2x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3}$.

$f'^{(x)} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2, (x \neq 0)$.

x	0 8	-2
$f'(x)$	$-$	$+$
f(x)	$γν. φθίνουσα$	Γν. αύξουσα

- Στο $(-\infty, -2)$: $f \downarrow$
- Στο $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$: $f \uparrow$

Η f παρουσιάζει στο $x_o = -2$ ελάχιστο το: $f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$.

Β2. Η f': παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$f''^{(x)} = -\frac{8 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0 \Rightarrow f$:κοίλη στο $R - \{0\} \Rightarrow$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ.

Β3.

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$.
  Άρα, $x = 0$: Κατακόρυφη ασύμπτωτη

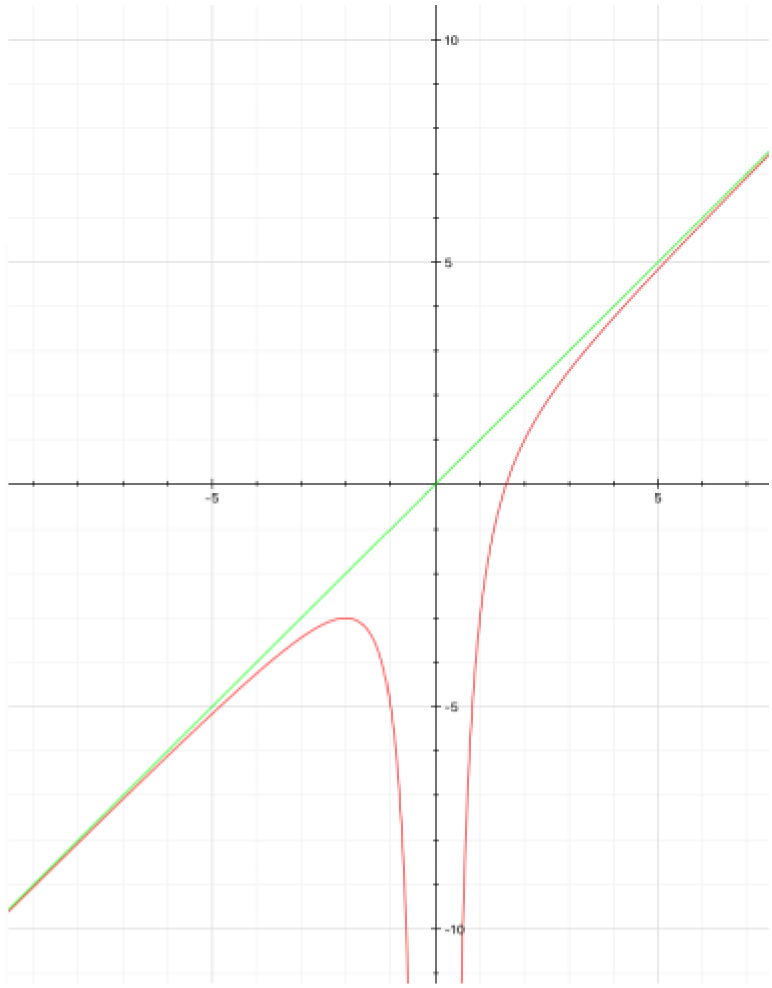
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$

Δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda \in R.$
  $\lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{x^2}\right) = 0 = \beta$
  Άρα, $y = x$: πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά τετραγώνου είναι: $\frac{\chi}{4}$

$E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16},\ x \in (0{,}8).$

$L = 2\pi\rho \Rightarrow 8 - x = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{4}{\pi} - \frac{x}{2\pi}.$

$E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{4}{\pi} - \frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi\left(\frac{16}{\pi^2} - 2\frac{4x}{\pi 2\pi} + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = \frac{16}{\pi} - \frac{4x}{\pi} + \frac{x^2}{4\pi}.$

$E_{o\lambda}(x) = E_{\tau\varepsilon\tau\rho} + E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi} - \frac{4x}{\pi} + \frac{16}{\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0{,}8).$

Γ2. $E'(x) = \frac{1}{16\pi}(2x(\pi+4) - 64)$

$E'(x) = 0 \Rightarrow 2x(\pi+4) - 64 = 0 \Rightarrow 2x(\pi+4) = 64 \Rightarrow x(\pi+4) = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{\pi+4}.$

x	0 8	$\frac{32}{\pi+4}$
$E'(x)$	$-$	$+$
$E(x)$	$\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$	$\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$

Στο $x = \frac{32}{\pi+4}$ το $E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

$\rho = \frac{4}{\pi} - \frac{32}{2\pi(\pi+4)} = \frac{4}{\pi+4}.$

Άρα, $\frac{\chi}{4} = \frac{32}{4(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}$, πλευρά τετραγώνου (1)

Άρα, $\delta = 2\rho = \frac{8}{\pi+4}$, διάμετρος (2)

Άρα, $(1) = (2) \Rightarrow E(x)$ ελαχιστοποιείται για $x = \frac{32}{\pi+4}$, με $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$.

Γ3. Η Ε συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$, άρα

$$E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

Αφού $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$ και $\lim_{x\to 0^-} E(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$, άρα $E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$ αφού $E = \left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$

Είναι: $\lim_{x\to 0^-} E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \lim_{x\to 8^+} = \frac{(\pi+4)8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$

Το $5 \in E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right)$ και η Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό

$x_o = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_o) = 5$.

Το $5 \notin E\left(\left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right]\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_1 \in \left(\frac{32}{\pi+4}, 0\right]$ ώστε $E(x_o) = 5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων.

$f(x)$: συνεχής ως πράξη συνεχών.

$f'(x) = 2e^{x-a} = 2x$

$f''(x) = 2e^{x-a} - 2 = 2(e^{x-a} - 1)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{x-a} = 1 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$

- $x = a$: $f''(a) = 2(1-1) = 0$
  $x = 9a$ $(\pi\rho o\varphi\alpha\nu\acute{\eta}\varsigma\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha)$ τουλαχιστόν 1- ρίζα (1).
- $f'''(x) = 2e^{x-a} > 0 \Rightarrow f'' \uparrow \Rightarrow$ το πολύ μια ρίζα (2).
  Άρα, από τις σχέσεις (1) και (2) η f'' έχει ακριβώς 1 – ρίζα άρα έχει και ακριβώς 1 σημείο καμπής.

Δ2) f''(x) γνησίως αύξουσα

x > α => f''(x) > 0

x < α => f''(x) < 0

x	-∞	α ∞
f''(x)	-	+
f'(x)	γν. φθίνουσα	γν. αύξουσα

Έστω f' τρεις ρίζες x_1, x_2 x_3

f' συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$

f' παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και (x_2, x_3)

$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3)$

Άρα, υπάρχει ξ_1 στο (x_1, x_2) και ξ_2 στο (x_2, x_3) τέτοια ώστε :

$f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Εφόσον f'' γνησίως μονότονη άρα <<1-1>>

Επομένως, $\xi_1 = \xi_2$, άτοπο αφού η f'' έχει ακριβώς μια ρίζα.

Άρα, f' έχει ακριβώς δυο ρίζες .

$x < x_1 < \alpha \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$, f' γν. φθίνουσα, f γν. αύξουσα

$x_1 < x < \alpha \Rightarrow f'(x_1) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < 0$, f γν. φθίνουσα

$\alpha < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$, f γν. φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$

$\alpha < x_2 < x \Rightarrow f'(x_2) < f'(x)$ f γν. Αύξουσα στο $[x_2, \infty)$

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο για $x = x_1$ και μοναδικό ελάχιστο για $x = x_2$

Δ3) f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$ με $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$ και $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$

Είναι $2 - \alpha^2 < 2e^{1-\alpha} - 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Έστω $g(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, $x > 1$

g δύο φορές παραγωγίσιμη

$g'(x) = 2x - 2e^{1-x}$

$g''(x) = 2 + 2e^{1-x} > 0$ x ανήκει στο $[1, \infty)$

Αν $x > 1 \Rightarrow g'(x) > g'(1) = 0$

g' γνησίως αύξουσα

$x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1) = 0$

Άρα, $g(\alpha) > 0$ άρα $f(\alpha) < f(1)$ άρα είναι αδύνατη η $f(x) = f(1)$ στο (α, x_2)

Δ4) f παρουσιάζει καμπή στο Α(2, -2), άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$

f κυρτή στο $[2, \infty)$ άρα,

$f(x) \geq y$

Για $x = 2$ ισχύει η ισότητα

$\sqrt{x-2} \geq 0$ για $x \geq 2$

$f(x) \geq -2x+2 \Rightarrow \sqrt{x-2}f(x) \geq (-2x+2)\sqrt{x-2} \Rightarrow$

$\int_2^3 \sqrt{x-2}$f(x)dx ≥$\int_2^3 (-2\mathrm{x}+2)\sqrt{x-2}$ dx =I

Υπολογίζοντας το I έχουμε ότι :

Y^2 = x -2 => dx = -2ydy

X=2 => y =0

X=3 => y= 1

$\int_0^1 (-2y^2+2)ydy$ = $\int_0^1 (-2y^3+2y)dy$ = -32/15

$\int_2^3 \sqrt{x-2}$f(x)dx > -32/15